CHAPITRE 6 : FONCTIONS EXPONENTIELLES

I. RESUME DE COURS

1. Définition et propriétés

La bijection réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée fonction exponentielle de base e .

$$\left| \begin{array}{l} f :]0;+\infty[\to]-\infty;+\infty[\\ \quad x \mapsto \ln x \end{array} \right\rangle \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f^{-1} :]-\infty;+\infty[\to]0;+\infty[\\ \quad x \mapsto e^x \end{array} \right\rangle$$

Propriétés

Pour tous réels x et y on a :

$y > 0;\quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
$e^x > 0$	$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
$\ln e^x = x$	$0 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$
$x > 0 \Rightarrow e^{\ln x} = x$	$e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
$e^0 = 1;\ e^1 = e$.	
$e^x \times e^y = e^{x+y}$, $\quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $\quad (e^x)^y = e^{xy}$

2. Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$,

$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$.)

3. Dérivées et primitives

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ est une fonction dériable sur I} \\ f(x) = e^{u(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f \text{ est dériable sur I} \\ f'(x) = u'(x)e^{u(x)} \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ est une fonction dériable sur I} \\ f(x) = u'(x)e^{u(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} F(x) = e^{u(x)} \text{ est une} \\ \text{primitive de f sur I} \end{array}}$$

Cas particuliers :

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$	$f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$

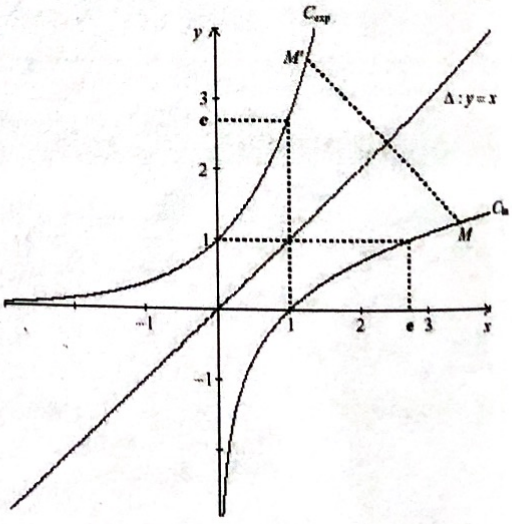
4. Variations et représentation graphique

Soit $f(x) = e^x$. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée strictement positive : $f'(x) = e^x$.

La fonction exponentielle f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'		+		
f	0	1	e	$+\infty$

La représentation graphique de la fonction exponentielle de base e est symétrique de celle de la fonction logarithme népérien par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Asymptote horizontale	$y = 0$
Branche parabolique	Direction (Oy)
Tangente en (0,1)	$y = x + 1$
Tangente en (1,e)	$y = ex$

5. Croissances comparées de x^α, e^x et $\ln x$

Pour tous réels α et β strictement positifs:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(a^x)^\beta}{x^\alpha} = +\infty \text{ (pour tout réel } a > 1).$$

Au voisinage de plus l'infini, les puissances d'exposant positif l'emportent sur le logarithme; et l'exponentielle l'emporte sur les puissances à exposant strictement positif.

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Choisir la bonne réponse :

1	Soit $f(x)=(e^{-2x})^3\times(e^{-3x})^{-2}$. Alors	
	Réponse A	$f(x)=e^{-12x}$
	Réponse B	$f(x)=e^{12x}$
	Réponse C	0
	Réponse D	1

2	Le domaine de définition de la fonction $f(x)=\dfrac{e^{3x+1}}{(e^x)^2-1}$ est
	Réponse A	$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
	Réponse B	$]1;+\infty[$
	Réponse C	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
	Réponse D	$]-\infty;+\infty[$

3	L'équation $(e^x+1)(e^{2x}-5e^x-6)=0$ ....
	Réponse A	admet une unique solution
	Réponse B	admet deux solutions
	Réponse C	admet trois solutions
	Réponse D	n'admet pas de solution

4	La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$ est	
	Réponse A	$x \mapsto e^{\cos x}$
	Réponse B	$x \mapsto \cos x \times e^{\sin x}$
	Réponse C	$x \mapsto -\cos x \times e^{\sin x}$
	Réponse D	$x \mapsto -e^{\cos x}$

5	Soit $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Alors on a :	
	Réponse A	$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-2x}}$
	Réponse B	$f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{-2x}+e^{x}}$
	Réponse C	$f(-x)=\dfrac{e^{x}}{1-e^{x}}$
	Réponse D	$f(x)+f(-x)=1$

6	$I=\int_1^3 (x-1)e^{-x}dx$	
	Réponse A	$I=e^{-1}-e^{-3}$
	Réponse B	$I=e^{-3}-3e^{-1}$
	Réponse C	$I=3e^{-3}$
	Réponse D	$I=e^{-1}-3e^{-3}$

QCM 2

Choisir la bonne réponse :

1	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{x^2+1}$ et C sa courbe représentative.	
	Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
	Réponse B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
	Réponse C	La droite D d'équation $y=1$ est asymptote à C.
	Réponse D	L'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^4}$.	
	Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
	Réponse B	$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$
	Réponse C	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
	Réponse D	L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$

3	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{e^x-x}$ et C sa courbe représentative.	
	Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
	Réponse B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
	Réponse C	La courbe C admet une asymptote horizontale.
	Réponse D	La courbe C admet une asymptote verticale.

4	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$ et C sa courbe représentative:	
	Réponse A	f est une fonction paire
	Réponse B	f est croissante
	Réponse C	Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$
	Réponse D	La courbe C admet deux asymptotes horizontales.

5	Une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est	
	Réponse A	$x\mapsto \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$
	Réponse B	$x\mapsto \ln(e^x+1)$
	Réponse C	$x\mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
	Réponse D	$x\mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$

6	Soit $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{5x}$. On a	
	Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
	Réponse B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
	Réponse C	$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{2}{5}$
	Réponse D	$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{1}{5}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

2) $3e^x + 17e^{-x} - 20 = 0$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} 5e^x - 2e^y = 4 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1) $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$; $x \to -\infty$

2) $g(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$; $x \to 0$

3) $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2 + 3x}$; $x \to 0$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction f dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1.a) Calcuer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement.

b) Calcuer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

2.a) Montrer que : $f'(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Tracer la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes des coordonnées puis construire (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4.a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = f(x) + e^x$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire S du domaine plan délimité par la courbe (C) et les axes de coordonnées.

5. On définit une suite numérique (U_n) par son terme général : $U_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

a) Calculer U_1 , U_2. Montrer que (U_n) est décroissante (On pourra utiliser les variations de f).

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Donner une équation de la tangente T à C au point Ω d'abscisse 0.

b) Vérifier que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe (C). Que peut-on dire de ce point ?

c) Déduire la position relative de (C) et (T).

3.a) Tracer (C) et (T).

b) Calculer, en centimètre carré, l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), les axes des coordonnées et la droite d'équation $x=1$.

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

c) Déduire de 1.b) le tableau de variation de f^{-1}.

d) Déduire de ce qui précède les éléments géométriques de la courbe (C') et la tracer dans un nouveau repère.

Exercice 7

Soit la fonction numérique f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x}=xe^{-x}$

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f et vérifier que f est décroissante sur $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 4cm.

2. On considère la suite numérique de terme général $U_n = f(n) = \frac{n}{e^n}$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

a) Calculer U_1 et U_2.

b) Prouver que la suite (U_n) est décroissante et positive (On peut utiliser 1.b)) puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

c)Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\quad U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}} \quad (*)$

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

a) En utilisant l'égalité (*) prouver que : $S_n = \frac{-1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$.

b) Déduire de ce qui précède: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 8

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x + 2 + e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer et donner une interprétation graphique de :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+2))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α puis vérifier que $-2,5<\alpha<-2$.

5. Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6.a) Déterminer la primitive F de f qui vérifie : $F(0)=0$.

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x=\alpha$ et $x=0$.

Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α. Montrer que $A(\alpha)=\dfrac{6-2\alpha-\alpha^2}{2}$.

7.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=\alpha$.

b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{-1}{\alpha+1}$.

8. On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x)=\ln(x+2+e^x).$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Construire la courbe (Γ) de g dans un nouveau repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) L'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

Posons $e^x = t$ avec $t > 0$. Alors l'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ se ramène à une équation du second degré : $t^2 - t - 6 = 0$. Les solutions de cette équation sont $t_1 = 3 > 0$ et $t_2 = -2 < 0$. La dernière solution est négative, donc rejetée car pour tout réel x on a : $e^x > 0$. On a $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. On en déduit que l'équation admet une unique solution : $x = \ln 3$.

2) L'équation $3e^x + 17e^{-x} - 20 = 0$

Multiplions par e^x ; L'équation devient $3e^{2x} - 20e^x + 17 = 0$.

On pose de même $e^x = t$ avec $t > 0$.

Alors l'équation $3e^{2x} - 20e^x + 17 = 0$ devient $3t^2 - 20t + 17 = 0$.

Les solutions de cette équation sont $t_1 = 1 > 0$ et $t_2 = \frac{17}{3} > 0$.

On a $t_1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$ et $t_2 = \frac{17}{3} \Leftrightarrow e^x = \frac{17}{3} \Leftrightarrow x = \ln \frac{17}{3}$.

D'où l'ensemble de solutions : $S = \left\{0; \ln \frac{17}{3}\right\}$.

Corrigé 2

Le système $\begin{cases} 5e^x - 2e^y = 4 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$ s'écrit également $\begin{cases} 5e^x - 2e^y = 4 \\ e^x \times e^y = 6 \end{cases}$

On pose $a = e^x$ et $b = e^y$, avec a et b strictement positifs. Le système est alors équivalent à $\begin{cases} 5a - 2b = 4 \\ ab = 6 \end{cases}$.

Ce qui donne $\begin{cases} 5a - 2b = 4 \\ 5ab = 30 \end{cases}$

Par suite $(2b+4)b=30$

Donc $(b+2)b=15$

Soit $b^2+2b-15=0$

Cette équation est une équation du second degré. Ces solutions sont $b=3$ **et** $b=-5$**. Mais b doit être strictement positif, donc la solution** $b=-5$ **ne convient pas. On a donc** $b=3$**. On remplace pour calculer a :**

$5a-2b=4 \Leftrightarrow a=\dfrac{2b+4}{5}$**. Donc** $a=\dfrac{2\times 3+4}{5}=\dfrac{10}{5}$ **soit** $a=2$**.**

Comme $(a,b)=(2,3) \Leftrightarrow (e^x,e^y)=(2,3)$ **; on en conclut que** $(x,y)=(\ln 2,\ln 3)$ **est l'unique solution du système.**

Corrigé 3

Pour lever l'indétermination on procède à des changements d'écritures ou de variables pour faire apparaître des limites usuelles.

1) On écrit $f(x)=\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ **et on procède à un changement de variable en posant** $t=e^x$**. Alors** $(x\to-\infty)\Leftrightarrow(t\to 0^+)$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ **;**

(limite usuelle).

2) On écrit $g(x)=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$**.**

D'une part, on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$**.**

D'autre part si on pose $t=\dfrac{1}{x^2}$**, alors** $(x\to 0)\Leftrightarrow(t\to+\infty)$ **et on obtient :**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ **; (limite usuelle).**

Conclusion :

Par produit : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$.

3) On écrit $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x(x+3)} = \dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{1}{x+3}$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ **, (limite usuelle) et** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \dfrac{1}{3}$.

Corrigé 4

1.a) Calcul de limites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x}(x^2 - 2x + 1)$$
$$= +\infty$$

En effet,

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 1) = +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{xe^x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^x}(x^2 - 2x + 1)$$
$$= -\infty$$

En effet, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{xe^x} = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-2x+1) = +\infty$ **.**

Interprétation graphique :

La courbe C admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$ **.**

b) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **:**

On reconnaît les limites usuelles $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = 0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0^+$ **dans la limite de f en** $+\infty$ **:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} - 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)$$

$$= 0^+$$

Interprétation graphique :

La courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ **au voisinage de** $+\infty$ **.**

2.a) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x-2)e^x - (x^2-2x+1)e^x}{(e^x)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2-x^2+2x-1)e^x}{(e^x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+4x-3}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -(x^2-4x+3)e^{-x}$$

Enfin : $f'(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x}$ **.**

b) Le signe de $f'(x)$ **est le signe contraire de** $(x-1)(x-3)$ **.**

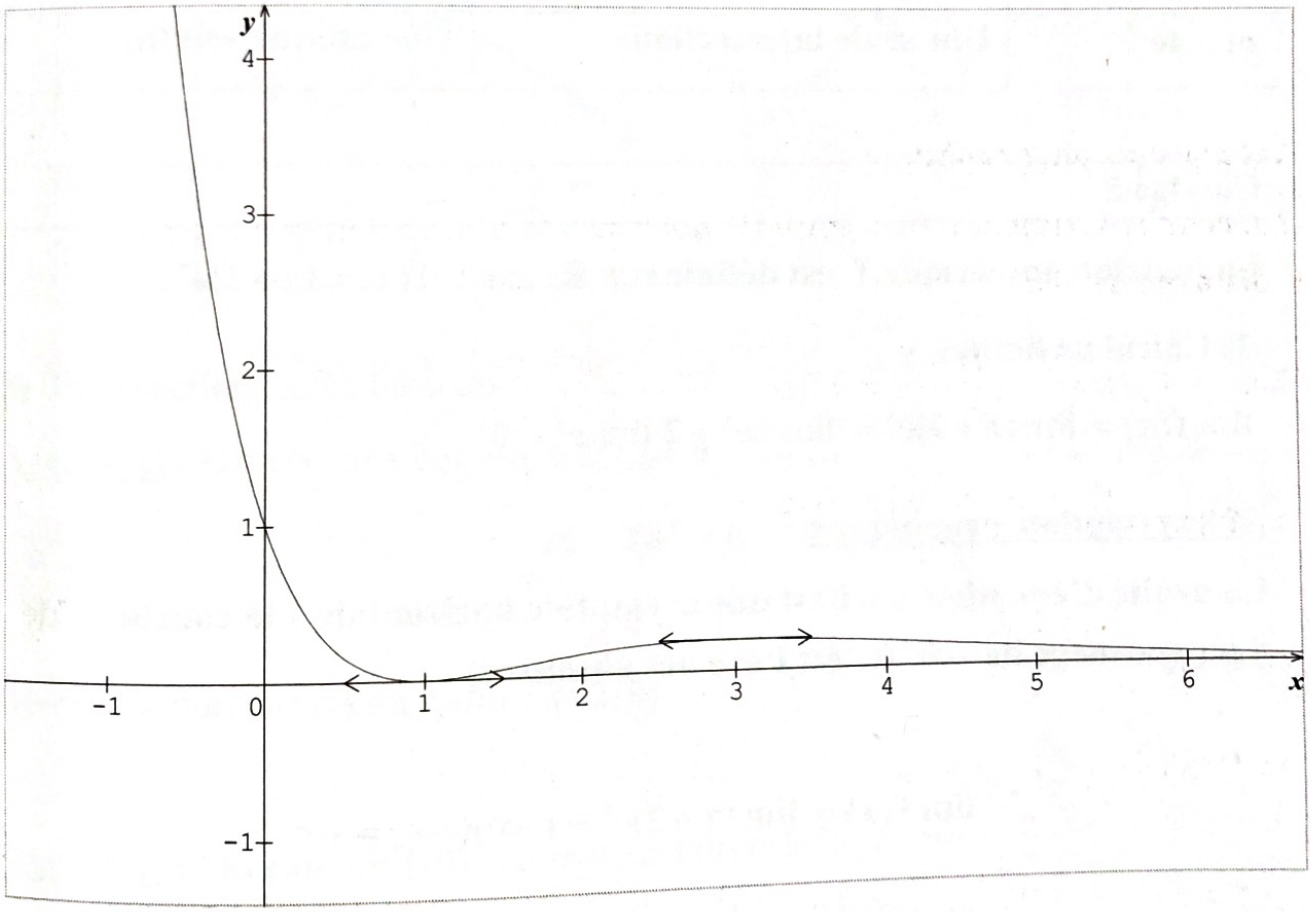
Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1;3]$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1$ **ou** $x = 3)$ **et on a :** $f(1) = 0$ **et** $f(3) = 4e^{-3}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-3}$	↘	0

3.a) La courbe de f :



b) Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ est le même nombre de points d'intersection entre la courbe (C) et la droite horizontale Δ_m d'équation $y=m$.

D'après la représentation graphique de f, on déduit le tableau suivant :

valeurs du paramètre m	nombre d'intersections de (C) et Δ_m	nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$
$m<0$	Pas d'intersection	0
$m=0$	Une intersection (tangente)	1 solution double
$0<m<4e^{-3}$	3 intersections	3 solutions différentes
$m=4e^{-3}$	2 intersections	2 solutions différentes
$m>4e^{-3}$	Une seule intersection	Une unique solution

Corrigé 5

La fonction numérique f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+2)e^x$.

1) Calcul de limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)e^x=\lim_{x\to-\infty} xe^x+2\lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

Interprétation graphique :

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe Γ de f au voisinage de $-\infty$. (C'est l'axe des abscisses)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^x=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}e^x=(1)(+\infty)=+\infty$$

Interprétation graphique :

La courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2) Dérivée et variation de f :

On a $f(x) = (x+2)e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + (x+2)e^x$

$f'(x) = (x+3)e^x$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+3)$ car pour tout réel x, $e^x > 0$.

On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ et $f(-3) = -e^{-3}$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f '(x)	-	0	+
f(x)	0 ↘	$-e^{-3}$	↗ $+\infty$

3) Intersections avec les axes :

Avec (Ox) : On résout l'équation $f(x) = 0$

$$(x+2)e^x = 0$$

$$x = -2$$

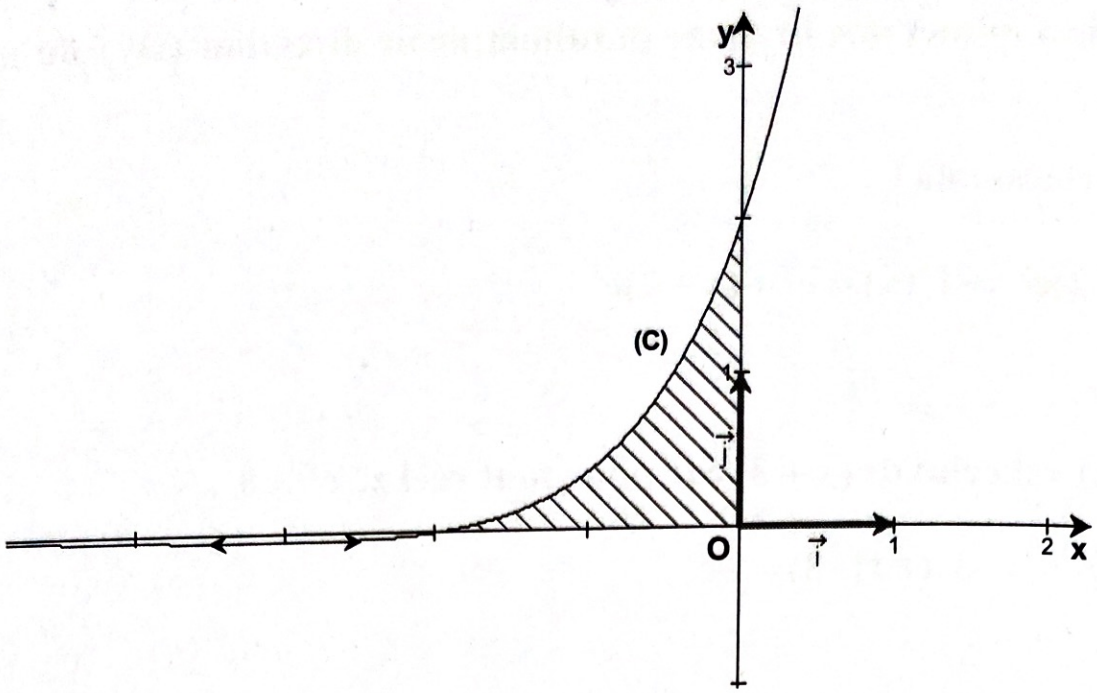
Alors (C) coupe (Ox) au point : $(-2;0)$.

Avec (Oy) : On calcule $f(0)$, on trouve $f(0) = 2e^0 = 2$.

Alors (C) coupe (Oy) au point $(0;2)$.

Les points précédents sont placés sur la figure.

Construction de (C) :



4.a) On a $f'(x) = (x+3)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x + e^x$

Alors, pour tout réel x on a : $f'(x) = f(x) + e^x$ **.**

On en déduit que $f(x) = f'(x) - e^x$

D'où, la fonction $F(x) = f(x) - e^x$ **est une primitive de f sur** $\mathbb{R}$

Soit $F(x) = (x+2)e^x - e^x = (x+1)e^x$ **.**

b) Le domaine plan délimité par la courbe (C) et les axes de coordonnées est, d'autre part, limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ **et** $x = 0$

Comme f est continue et positive sur l'intervalle $[-2,0]$**, l'aire S du domaine en question est calculée par :**

$$S = \int_{-2}^{0} f(x)dx \times ua$$

$$S = \big(F(0) - F(-2)\big) \times ua$$

$$S = (e^0 - (-e^{-2})) \times ua$$

$$S = (1 + e^{-2}) \times ua$$

L'unité de longueur est 1cm, donc l'unité d'aire est $ua = 1cm^2$. Donc $S = 1 + e^{-2}$ cm^2

5) La suite numérique (U_n) est définie par son terme général : $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

a) $U_1 = f(1) = 3e$

$U_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{e}$

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction f est strictement croissante.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on sait que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Alors $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc $U_{n+1} < U_n$. D'où la suite (U_n) est décroissante.

b) En posant $t = \frac{1}{n}$, on a $(n \to +\infty) \Leftrightarrow (t \to 0^+)$ et :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{t\to0^+} f(t) = f(0) = 2$ car f est continue en 0^+.

Corrigé 6

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0^+$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}$$
$$= 1$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$

Interprétation graphique :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^+ \Rightarrow$ (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow$ (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.

$f'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}$ soit $f'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. On constate que $f'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		+	
f	0	↗	1

2.a) Une équation de la tangente T à C au point Ω d'abscisse 0 est du type

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Donc T : $y=f'(0)(x)+f(0)$ soit $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

b) Le point Ω d'abscisse 0 a pour ordonnée $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

Vérifions une égalité du type $f(2a-x)+f(x)=2b$ avec $(a,b)=(0,\dfrac{1}{2})$

Comme $a=0$, on a : $2a-x=-x\in D_f; \forall x\in D_f$ car $D_f=\mathbb{R}$, et

$$f(2a-x)=f(-x)$$
$$=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}$$
$$=\frac{1}{e^{x}+1}$$

Donc , $f(2a-x)+f(x)=\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ **ce qui donne**

$$f(2a-x)+f(x)=\frac{1+e^{x}}{e^{x}+1}$$
$$=1$$
$$=2\times\frac{1}{2}$$
$$=2b$$

D'où $\Omega(0,\frac{1}{2})$ **est un centre de symétrie de la courbe (C).**

Le point $\Omega(0,\frac{1}{2})$ **est un centre de symétrie appartenant à la courbe d'une fonction dérivable. Donc** $\Omega(0,\frac{1}{2})$ **représente aussi un point d'inflexion de cette courbe.**

c) La tangente à C à son point d'inflexion traverse cette courbe. Alors la position relative de (C) et (T) change au point Ω **.**

$$f'(x)=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}\Rightarrow f''(x)=\frac{e^{x}(1+e^{x})^{2}-2e^{x}(1+e^{x})e^{x}}{(1+e^{x})^{4}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{e^{x}(1+e^{x}-2)}{(1+e^{x})^{3}}$$

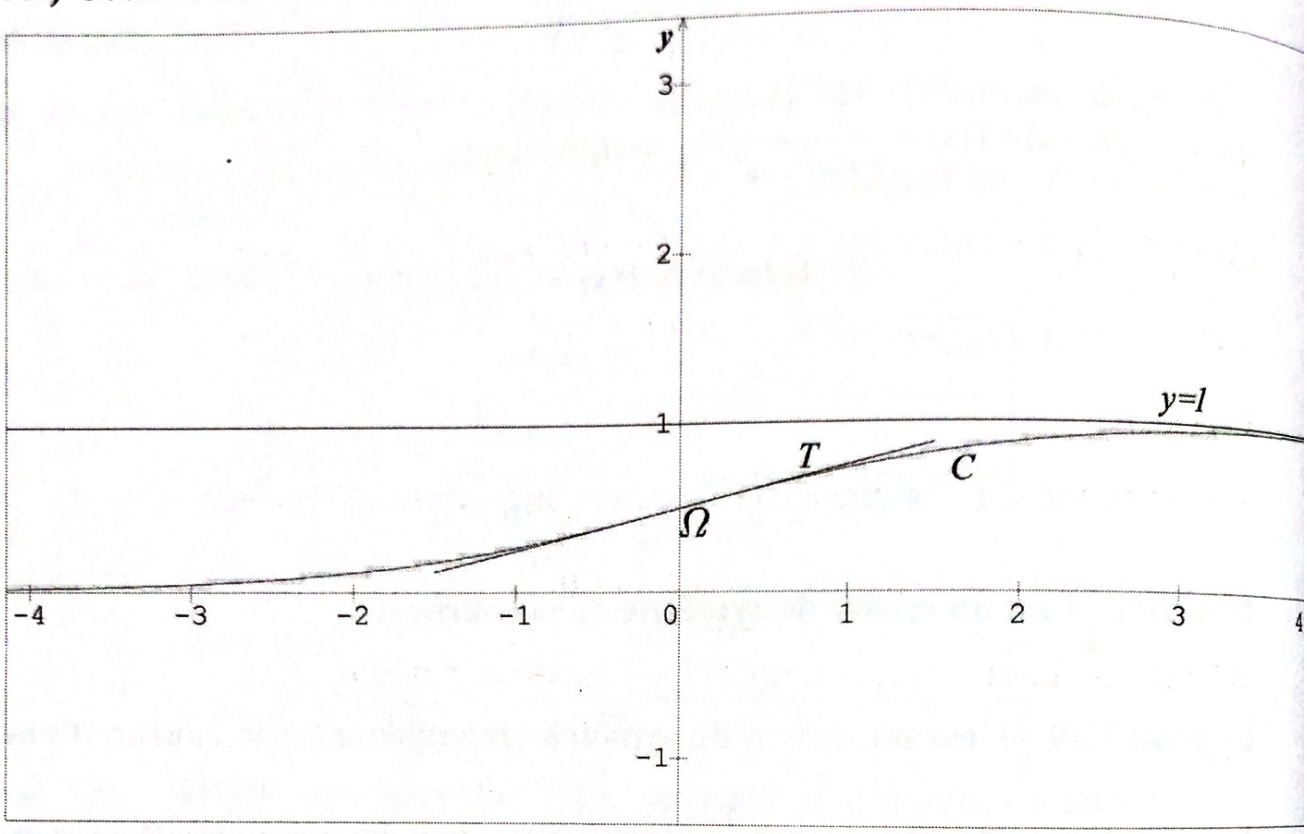
$$\Rightarrow f''(x)=\frac{e^{x}(e^{x}-1)}{(1+e^{x})^{3}}$$

Le signe de la dérivée seconde est celui de $(e^{x}-1)$

pour $x \leq 0$ on a $e^x - 1 \leq 0$, donc la courbe C est au dessus de T : (C / T) ;

pour $x \geq 0$ on a $e^x - 1 \geq 0$, donc la courbe C est en dessous de T : (T / C).

3.a) Courbe de f :



d) L'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), les axes des coordonnées et la droite d'équation $x = 1$ est exactement limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ (l'axe Oy), et $x = 1$.

La fonction f étant continue est positive sur l'intervalle $[0,1]$.

Par conséquent, l'aire A est calculée par l'intégrale : $A = \int_0^1 f(x)dx$

On reconnaît dans l'écriture de $f(x)$ le modèle : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = e^x + 1$. Or, pour tout x réel, $e^x + 1 > 0$ donc la fonction $F(x) = \ln(e^x + 1)$ est une primitive de f.

$$A = \int_0^1 f(x)dx$$

$$A = \left[\ln(e^x + 1)\right]_0^1$$

$$A = \ln(e+1) - \ln 2$$

$$A = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$A \simeq 0,62 \quad \text{unité d'aire.}$$

On a $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$ cm , donc une unité d'aire est $\left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| = 1\ \text{cm}^2$.

Par suite $A \simeq 0,62$ centimètre carré.

4.a) On a :

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(\mathbb{R}) =]0;1[$

Alors $f : \mathbb{R} \to J$ est bijective avec $J =]0,1[$.

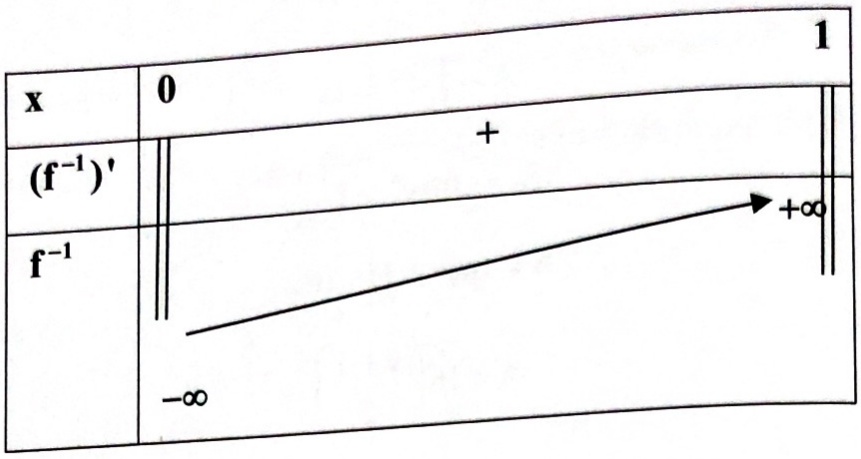
b) Pour exprimer $f^{-1}(x)$, on pose $y = f(x)$ avec $y \in]0,1[$

On a :

$$y = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow y(1+e^x) = e^x$$
$$\Leftrightarrow y + ye^x = e^x$$
$$\Leftrightarrow ye^x - e^x = -y$$
$$\Leftrightarrow (y-1)e^x = -y$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{-y}{y-1}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-y}{y-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

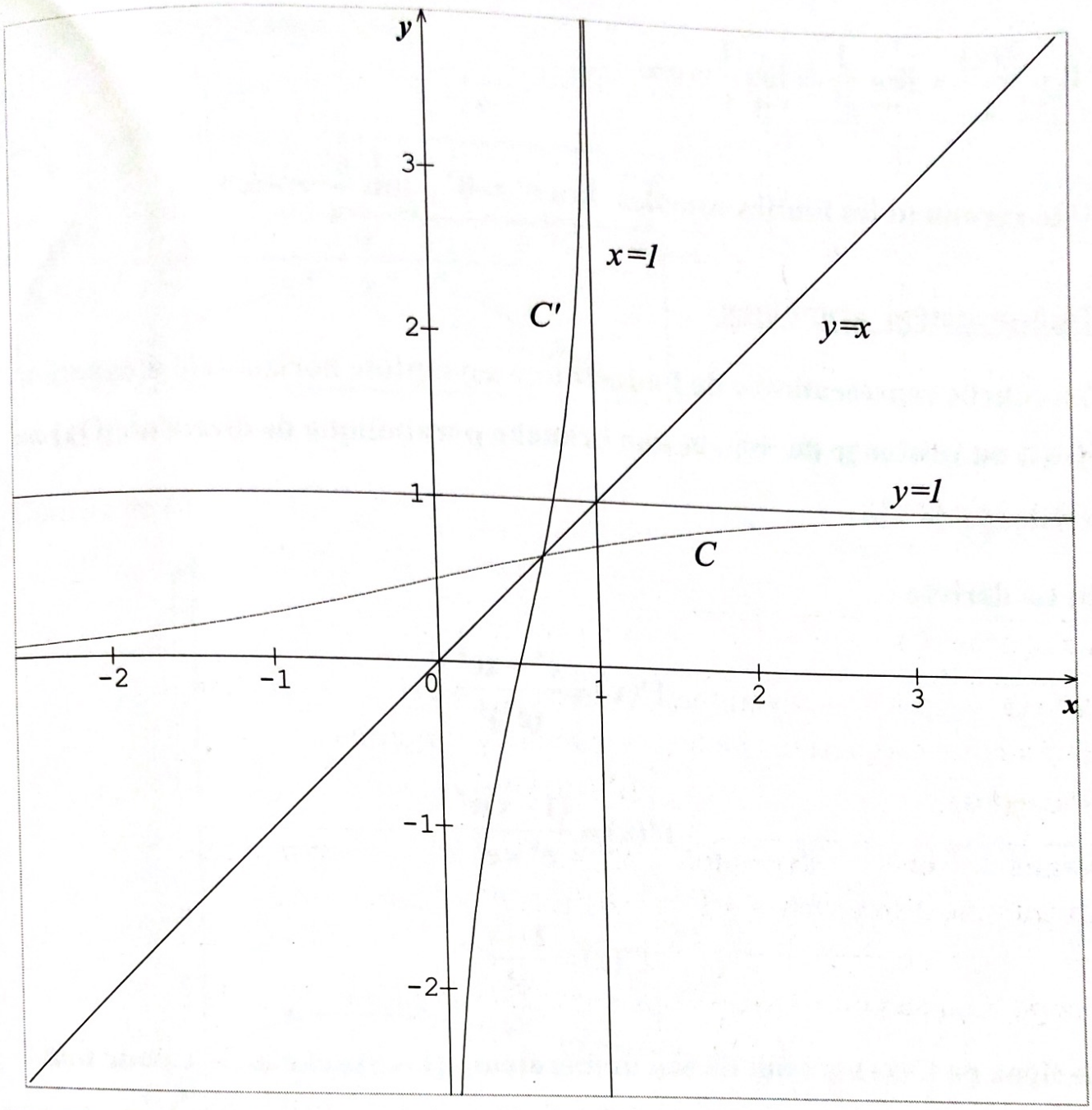
D'où $= f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in]0,1[$

c) Le tableau de variation de f^{-1} se déduit directement de celui de f :



d) La courbe (C') est symétrique à (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$. En effet :

La courbe (C)	La courbe (C')
Admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, (l'axe (Ox))	Admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$, (l'axe (Oy))
Admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$	Admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$
Coupe (Oy) au point $\Omega(0;\frac{1}{2})$	Coupe (Ox) au point $\Omega'(\frac{1}{2};0)$
Admet leu point $\Omega(0;\frac{1}{2})$ comme centre de symétrie	Admet leu point $\Omega'(\frac{1}{2};0)$ comme centre de symétrie



Corrigé 7

La fonction f est définie par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x}=xe^{-x}$.

1) <u>Calcul de limites :</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-x}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}=+\infty$$

(On reconnaît les limites usuelles $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$).

Interprétation graphique

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$, et une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$.

b) La dérivée :

$$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1-x)e^x}{e^x\times e^x}$$

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$$

Le signe de f '(x) est celui de son numérateur $(1-x)$, car $e^x>0$ pour tout réel x.

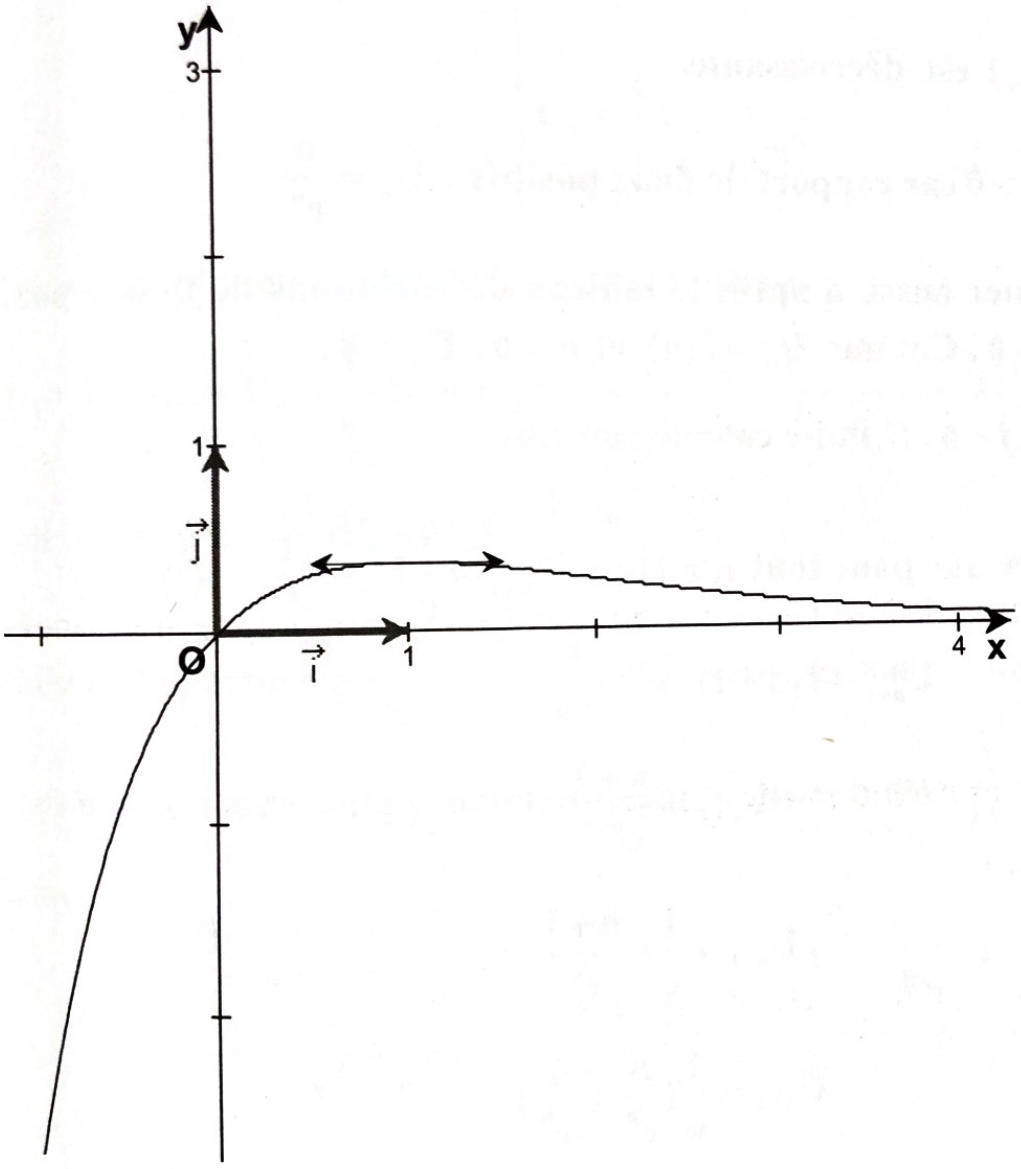
Comme pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a $1-x\le0$; donc sur cet intervalle $f'(x)\le0$.

On en déduit que f est décroissante sur $[1;+\infty[$.

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	–	
f(x)	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

Courbe de f :



2) La suite (U_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par son terme général

$$U_n = f(n) = \frac{n}{e^n}.$$

a) Calcul de termes :

$$U_1 = f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$U_2 = f(2) = \frac{2}{e^2} = 2e^{-2}$$

b) Nous savons d'après la question 1.b) que f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a :

$n < n+1 \Rightarrow f(n) > f(n+1)$ **car la fonction décroissante inverse l'ordre.**

C'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$ on a $U_n > U_{n+1}$.

Alors la suite (U_n) est décroissante.

D'autre part $U_n > 0$ car rapport de deux positifs : $U_n = \frac{n}{e^n}$.

On peut remarquer aussi, d'après le tableau de variations de f, que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$. Comme $U_n = f(n)$ et $n > 0$, $U_n > 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ **. (Limite calculée au 1.a)**

c) Pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ (*)

on a : $U_{n+1} = f(n+1)$

$$U_{n+1} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{e^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}\left(U_n + \frac{1}{e^n}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$$

3) Pour tout entier $n \geq 1$; $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

D'après l'égalité (*) on a :

$$\begin{cases} U_2 = \frac{1}{e}U_1 + \frac{1}{e^2} \\ U_3 = \frac{1}{e}U_2 + \frac{1}{e^3} \\ U_4 = \frac{1}{e}U_3 + \frac{1}{e^4} \\ \vdots \quad \vdots \\ U_n = \frac{1}{e}U_{n-1} + \frac{1}{e^n} \end{cases}$$

En sommant membre à membre ces égalités :

$$U_2 + U_3 + \ldots + U_n = \frac{1}{e}\left(U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}\right) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$$

soit $S_n - U_1 = \frac{1}{e}(S_n - U_n) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$

Comme la partie $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ **représente la somme de** $(n-1)$ **termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme** $\frac{1}{e^2}$ **et de raison** $\frac{1}{e}$**, donc:**

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^2} \times \frac{1 - \frac{1}{e^{n-1}}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{n-1}}}{e^2 - e}$$

Or $U_1 = \frac{1}{e}$**, donc** $S_n - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(S_n - U_n) + \frac{1 - \frac{1}{e^{n-1}}}{e^2 - e}$

$$(1-\frac{1}{e})S_n = \frac{1}{e} - \frac{1}{e}U_n + \frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n = \frac{e-1}{e^2-e} - \frac{1}{e}U_n + \frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n = -\frac{1}{e}U_n + \frac{e-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n = -\frac{1}{e}U_n + \frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$$

$$S_n = -\frac{e}{e-1}\cdot\frac{1}{e}U_n + \frac{e}{e-1}\cdot\frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$$

$$S_n = \frac{-1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$$

b) On sait que $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$.

Cela entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{e^n}) = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n}) = \frac{e}{(e-1)^2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ **, donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$.

Corrigé 8

La fonction numérique f est définie par : $f(x)=x+2+e^x$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm .

1.a) On a :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$. Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+2))=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y=x+2$ au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2+e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x}+\frac{e^x}{x})=+\infty.$$

Interprétation graphique :

La courbe (C) a une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2. Tableau de variation de f

$f'(x)=1+e^x$. Donc $f'(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

3. La fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ car :

- **f est continue sur $\mathbb{R}$;**
- **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;**
- **$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.**

4. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque :

- **f est continue sur $\mathbb{R}$;**
- **f change de signe sur $\mathbb{R}$.**

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $\mathbb{R}$.

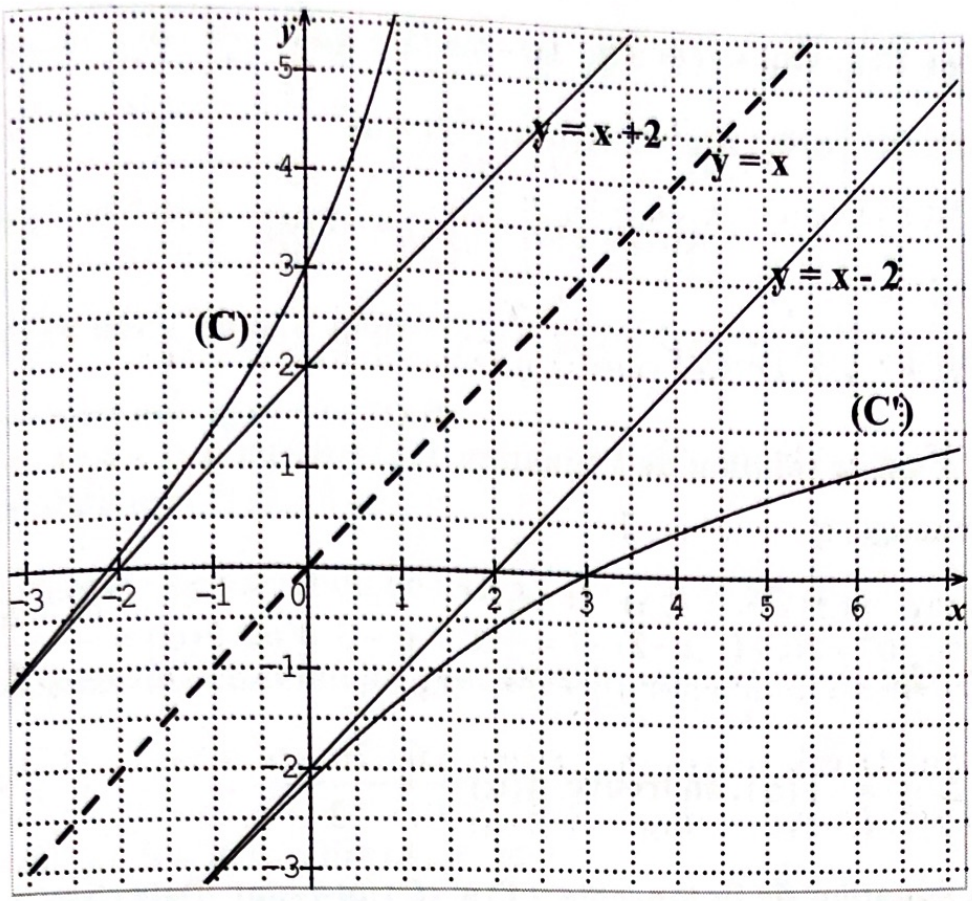
Cette solution est unique car f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la calculatrice on trouve $f(-2,5) \approx -0,418$ et $f(-2) \approx 0,135$.
Donc $f(-2,5) \cdot f(-2) < 0$. D'où $-2,5 < \alpha < -2$.

5. Construction :

Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$:

La courbe (C)	La courbe (C')
Admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$ au voisinage de $-\infty$	Admet une asymptote oblique d'équation $x = y + 2$ au voisinage de $-\infty$
Admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.	Admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.
Coupe (Oy) en (0,3)	Coupe (Ox) en (3,0)
Coupe (Ox) en $(\alpha, 0)$	Coupe (Oy) en $(0, \alpha)$



6.a) Comme les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x$ et $x \mapsto e^x$ sont respectivement des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions $x \mapsto x + 2$ et $x \mapsto e^x$; on déduit que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + e^x + k$ où k est un réel quelconque, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Si $F(0) = 0$, alors on a $1 + k = 0$, d'où $k = -1$ et on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + e^x - 1$$

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

Pour calculer, en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ où α est la

solution de l'équation $f(x)=0$; on constate que f est continue et positive sur l'intervalle $[\alpha;0]$. Alors : $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$

$$A(\alpha)=F(0)-F(\alpha)=-F(\alpha)$$

donc : $A(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha+e^{\alpha}-1$.

Puisque α est la solution de l'équation $f(x)=0$; on a $\alpha+2+e^{\alpha}=0$, alors $e^{\alpha}=-\alpha-2$.

$F(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha+(-\alpha-2)-1=\frac{1}{2}\alpha^2+\alpha-3$ d'où $F(\alpha)=\frac{\alpha^2+2\alpha-6}{2}$

Comme $A(\alpha)=-F(\alpha)$, on trouve $A(\alpha)=\frac{6-2\alpha-\alpha^2}{2}$.

7.a) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=\alpha$ est donnée par : $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

On a $f'(\alpha)=1+e^{\alpha}$ et $f(\alpha)=0$, d'où l'équation de T :

$y=(1+e^{\alpha})(x-\alpha)$ soit $y=(1+e^{\alpha})x-\alpha(1+e^{\alpha})$.

Comme $e^{\alpha}=-\alpha-2$, on obtient l'équation suivante de T :

$$y=-(1+\alpha)x+\alpha(1+\alpha)$$

b) On sait que $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Donc $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$

Comme $f(\alpha)=0$, on a $(f^{-1})(0)=\alpha$. Donc $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(\alpha)}$

Comme $f'(\alpha)=1+e^{\alpha}$, on a $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{1+e^{\alpha}}$.

Mais $f(\alpha)=0$ implique $\alpha+2+e^{\alpha}=0$, donc $(\alpha+1)+(1+e^{\alpha})=0$.

Alors $1+e^{\alpha}=-(\alpha+1)$ et $\dfrac{1}{1+e^{\alpha}}=\dfrac{1}{-(\alpha+1)}$

Conclusion : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{-1}{\alpha+1}$.

8. La fonction numérique g définie par : $g(x)=\ln(x+2+e^{x})$,

a) On remarque que $g(x)=\ln(f(x))$.

Donc g est définie si $f(x)>0$.

D'après le tableau de variation de f on a : $f(x)>0 \Leftrightarrow x>\alpha$.

D'où l'ensemble de définition de g est $D_g=]\alpha,+\infty[$.

b) On a :

$\lim\limits_{x\to\alpha^{+}} f(x)=0^{+} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha^{+}} g(x)=\lim\limits_{t\to 0^{+}} \ln t=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t=+\infty$

Comme f est dérivable et strictement positive sur $D_g=]\alpha,+\infty[$, la fonction g est dérivable sur $D_g=]\alpha,+\infty[$, et $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

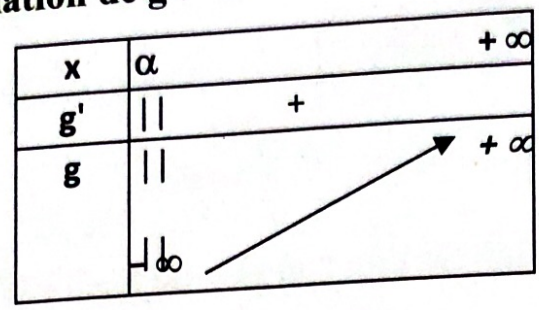
On sait que $f'(x)>0$ et $f(x)>0$ sur $D_g=]\alpha,+\infty[$. Alors $g'(x)>0$. Donc g est strictement croissante sur $D_g=]\alpha,+\infty[$.

Remarque :

On peut remarquer que la fonction g est la composée de deux fonctions croissantes : $x\mapsto f(x)$ et $x\mapsto \ln x$.

Donc g est croissante.

Tableau de variation de g :



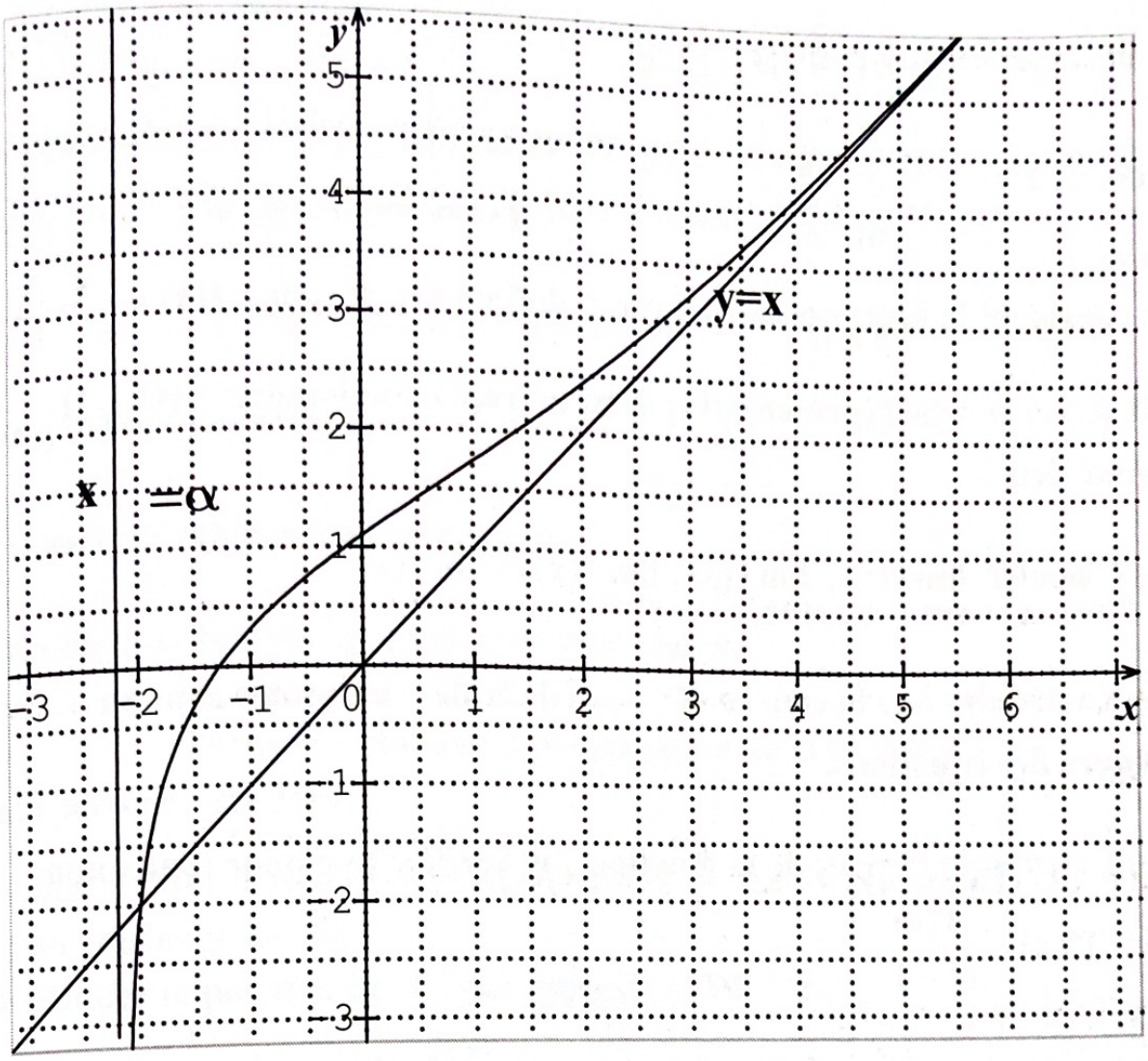
c) Pour la construction de la courbe (Γ) de g , on a:

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = -\infty$, **donc la courbe** Γ **admet une asymptote verticale d'équation** $x = \alpha$.

On peut écrire : $g(x) = \ln e^x(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1) = x + \ln(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1) = 0$

Alors la courbe Γ **admet une asymptote oblique d'équation** $y = x$ **au voisinage de** $+\infty$.


y
x
y=x
x =α
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) En déduire que la courbe (C) possède trois asymptotes dont on donnera des équations.

2.a) Calculer la dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout x non nul : $f'(x)=\dfrac{-f(x)}{e^x-1}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que la fonction g restriction de f sur $I=]0,+\infty[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer l'expression de la réciproque g^{-1} de g.

4.a) Montrer que la courbe (C) possède le point $\Omega(0,\dfrac{1}{2})$ comme centre de symétrie.

b) Construire les courbes (C) et (C') représentatives des fonctions f et g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + (x-1)e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + xe^x$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie B : étude et représentation de la fonction f

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

3.a) Calculer f'(x) puis, à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $0{,}4 < x_0 < 0{,}5$.

4.a) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente T à la courbe est parallèle à l'asymptote (D). Donner l'équation de T.

b) Tracer (C) , T et (D).

c) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x - 1 - me^{-x} = 0$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout x, $e^x-x>0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2x-1+2e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-1))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

2.a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α puis vérifier que $-0,3<\alpha<-0,2$.

3) Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=\alpha$.

b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{-2\alpha+3}$.

5) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_n=f(n)$

a) Montrer que (U_n) est la somme de deux suites : une arithmétique et une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) On pose $S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-1)\right)$ et interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ interpréter graphiquement.

2.a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β. Vérifier que $-1,3<\alpha<-1,2$ et $0,2<\beta<0,3$.

b) Représenter la courbe (C).

4) On définit les suites (U_n) et (V_n) pour tout entier naturel n par : $U_n=e^{-2n-1}$, $V_n=3n-1$.

a) Démontrer que la suite (U_n) est géométrique décroissante.

b) Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique croissante.

c) Les suites (U_n) et (V_n) sont- elles adjacentes ? Justifier.

5) Pour tout entier naturel n on pose : $S_n=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n)$.

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n^2}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2+2x+1)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm .

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que la courbe C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation f .

3) Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et calculer $(g^{-1})'(1)$.

5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que pour tout réel x on a : $e^{2x} - e^x + 1 > 0$. En déduire le domaine de définition de f.

2.a) Calcuer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

b) Calcuer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ et interpréter graphiquement.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4.a) Donner une équation de la tangente T au point de (C) d'ordonnée nulle.

b)Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5) Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue x :

$e^{2x} - e^x + 1 = \frac{7}{8}$ par deux méthodes :

a. par le calcul,

b. en utilisant la courbe (C).

Exercice 8

1. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = xe^x - e^x - 1$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calculer $g'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1,2 \leq \alpha \leq 1,3$.

e) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-2)(e^x-1)$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité $2cm$.

a) Calculer les limites suivantes et en donner des interprétations graphiques :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-x+2))$.

b) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f on utilisera 1.e).

c) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{1-\alpha}$ puis en déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(\alpha)$.

d) Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes des coordonnées.

e) Construire la courbe (C).

f) En utilisant une intégration par parties, calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=2$.

Exercice 9(Traduit)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, interpréter graphiquement ;

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement.

2. Calculer f'(x) et vérifier que C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.

3. Dresser le tableau de variation f

4. Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur IR.

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

لتكن الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$.

وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لها في مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدته 1cm.

a.1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وفسر بيانيا.

b) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ وفسر بيانيا.

2) احسب المشتقة f'(x) للدالة f وتحقق أن المنحنى C يقبل مماسين أفقيين يطلب تحديدهما.

3) ارسم جدول تغيرات f .

4) حدد تقاطع المنحنى C مع محوري الإحداثيات ثم مثله في المرجع $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a.5) عين الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث تكون الدالة $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ أصلية للدالة f على IR.

b) احسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.